

## 基于张量的互质面阵信号处理方法

饶伟<sup>1,2</sup>, 桂宇风<sup>1</sup>, 李旦<sup>2</sup>

(1. 南昌工程学院信息工程学院, 江西 南昌 330099; 2. 复旦大学信息科学与工程学院, 上海 200433)

**摘 要:** 针对由 2 个稀疏均匀矩形阵列 (URA) 构成的互质面阵 (CPPA), 提出了一种基于张量代数的阵列信号处理方法, 以提高阵列自由度。首先, 对 CPPA 中的 2 个 URA 进行拆分, 将这 2 个 URA 的接收信号表示成 2 个张量; 然后将其互相关结果处理成一个虚拟阵列的接收信号张量。分析表明, 所提方法可将一个具有  $2L^2 - 1$  个物理阵元的 CPPA 转换成一个具有  $\frac{(L+1)^4}{16}$  个阵元的虚拟稀疏非均匀面阵。针对该虚拟面阵, 给出了利用张量分解从其接收信号张量中估计入射信号二维波达角的方法, 以避免二维谱峰搜索。与文献报道的互质面阵信号处理方法相比, 所提方法将阵列自由度从  $L^2$  提升至  $\frac{(L+1)^4}{16} + 1$ , 并具有更好的信号波达角估计性能及较低的计算复杂度, 仿真结果证明了所提方法的有效性。

**关键词:** 互质面阵; 二维波达角估计; 张量分解; 自由度

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**doi:** 10.11959/j.issn.1000-436x.2020153

## Tensor-based approach to the co-prime planar array signal processing

RAO Wei<sup>1,2</sup>, GUI Yufeng<sup>1</sup>, LI Dan<sup>2</sup>

1. School of Information Engineering, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China

2. School of Information Science and Technology, Fudan University, Shanghai 200433, China

**Abstract:** For the co-prime planar array (CPPA) consisting of two sparse uniform rectangular array (URA), a new processing method based on tensor algebra was proposed to enhance the degrees of freedom (DoF). By dividing each URA into some overlapping subarrays, the received signals of two URAs were expressed as two tensors. And then the cross-correlation between such two tensors was processed into a received signal tensor of the virtual array. Analysis show that by the new method, the CPPA with  $2L^2 - 1$  physical elements can be transformed into a virtual sparse non-uniform planar array with  $\frac{(L+1)^4}{16}$  elements. For the virtual array, the tensor decomposition-based approach for estimating the two-dimensional (2-D) direction of arrival (DoA) of the incident signal is also proposed, which means 2-D spectral peak searching is avoided. Compared with the co-prime planar signal processing methods reported in the literature, the proposed method can increase the DoF from  $L^2$  to  $\frac{(L+1)^4}{16} + 1$ , and has the better performance of the 2-D DoA estimation and lower computational complexity. Simulation results demonstrate the efficiency of the proposed method.

**Key words:** co-prime planar array, two-dimensional direction of arrival estimation, tensor decomposition, degree of freedom

收稿日期: 2020-03-31; 修回日期: 2020-06-20

基金项目: 江西省教育厅科研技术研究基金资助项目 (No.GJJ170975); 国家自然科学基金资助项目 (No.61961025, No.11974082)

**Foundation Items:** The Science Research Foundation of Jiangxi Provincial Education Department (No.GJJ170975), The National Natural Science Foundation of China (No.61961025, No.11974082)

## 1 引言

波达方向 (DoA, direction of arrival) 估计作为阵列信号处理领域的一个主要研究方向, 广泛应用于通信、雷达、声呐等领域<sup>[1]</sup>。绝大多数子空间类 DoA 估计方法<sup>[2-4]</sup>最初是针对均匀线性阵列 (ULA, uniform linear array) 结构提出的, 且为避免出现角度模糊问题, 相邻阵元间距需小于或等于载波半波长。在物理阵元总数和阵列结构确定的情况下, 相邻阵元间距小意味着阵列孔径小, 此时难以获得更好的 DoA 估计性能。为此, 人们提出了一些具有高自由度或大孔径的非均匀线性阵列结构, 例如嵌套阵列<sup>[5]</sup>和互质阵列<sup>[6-8]</sup>。嵌套阵列中包含一个相邻阵元间距较小的子阵 (称为密集子阵), 其存在较严重的互耦效应, 这给信号参数估计带来了一定的负面影响。为解决这个问题, 文献[6]提出了一种互质阵列, 它由阵元数分别为  $M$  和  $N$  的 2 个 ULA 组成, 且这 2 个 ULA 中相邻阵元间距分别为  $\frac{N\lambda}{2}$  和  $\frac{M\lambda}{2}$ , 其中,  $\lambda$  为载波波长,  $M$  和  $N$  为互质整数。

特别地, 文献[6]证明了仅使用  $M + N - 1$  个物理阵元便可获得  $O(MN)$  的自由度 (DoF, degree of freedom)。随后, 文献[7-8]对互质阵列进行了更深入的研究, 从而进一步提升了阵列自由度。

上述均匀和非均匀线性阵列均为一维阵列, 一般情况下只能估计信号一维 DoA。为实现二维 DoA 估计, 众多学者将针对 ULA 的传统子空间类方法推广到二维领域, 提出了二维 MUSIC (multiple signal classification) 算法、二维 ESPRIT (estimation of signal parameters via rotational invariance technique) 算法、二维传播算子 (PM, propagator method)<sup>[9-12]</sup>等, 且主要应用于均匀矩形阵列 (URA, uniform rectangular array)、L 型阵列、圆形阵列等传统的二维阵列结构。与绝大多数传统的一维阵列相似, 受相邻阵元间距不超过载波半波长的限制, 这些二维阵列的孔径也较小。与之形成鲜明对比的是, 近年来提出的二维互质面阵 (CPPA, co-prime planar array) 结构<sup>[13]</sup>具有大阵列孔径的优良特性, 受到众多学者的关注<sup>[13-16]</sup>。互质面阵由 2 个稀疏的 URA 组成, 2 个 URA 中相邻阵元间距为载波半波长的互质整数倍, 且均大于载波半波长<sup>[13]</sup>。在该阵列结构下, 文献[13]提出了一种基于二维

MUSIC 的阵列信号处理方法, 用于信号二维 DoA 估计。文献[14]在文献[13]的基础上, 利用降维转换将频谱函数的维度从二维降低到一维, 从而减少了算法的计算复杂度。文献[15]针对互质面阵引入二维 PM, 使算法的计算复杂度得到了进一步的改善, 但在低信噪比或少快拍数的情况下其信号 DoA 估计性能不佳。上述文献报道的二维互质面阵及其相应处理方法的优势在于其可通过增加相邻阵元间距以获取大阵列孔径, 从而提高信号处理效果, 但不足之处在于需要同时借助 2 个 URA 的独立工作来消除 DoA 估计值中出现的相位模糊。即 2 个 URA 相互独立地采用文献中所提出的方法对相同入射信号进行二维 DoA 估计。这是因为, 2 个 URA 的相邻阵元间距均大于载波半波长, 导致它们的 DoA 谱估计中均存在“伪峰”, 为了去除“伪峰”, 就需要借助 2 个 URA 中相邻阵元间距为互质整数倍的关系, 对这 2 个 URA 的估计结果进行比对处理。因此, 这些方法虽然具有大阵列孔径的优点, 但同时牺牲了阵列一半以上的自由度, 即其所能识别处理的入射信号数小于互质面阵阵元总数的一半。虽然文献[16]对互质面阵结构进行了进一步优化, 提出了广义互质面阵结构以保证其 2 个 URA 的阵元数相等, 但受到阵列信号处理方法的限制, 其自由度也只是被提升至阵元总数的一半。此外, 一维互质阵列及其处理方法主要用于提高阵列自由度, 而二维互质面阵及其处理方法主要用于提高阵列孔径但牺牲了阵列自由度。

为了在保留大阵列孔径优势的前提下提高二维互质面阵的自由度, 本文借助张量代数提出了一种新的阵列信号处理方法。首先将互质面阵中所包含的 2 个 URA 均划分成若干个重叠子面阵, 并将这些子面阵的接收信号组合成一个张量; 然后对这 2 个 URA 所对应的 2 个接收信号张量进行互相关操作, 并将结果处理成一个虚拟阵列的接收信号张量。分析结果表明, 利用所提方法可将一个具有  $2L^2 - 1$  个物理阵元的互质面阵转换成一个具有  $\frac{(L+1)^4}{16}$  个阵元的虚拟稀疏非均匀面阵, 从而大幅提高了阵列自由度。为避免使用二维谱峰搜索, 本文给出了采用张量分解从虚拟面阵信号张量中获取信号二维 DoA 的方法。与文献[13-16]报道的互质面阵信号处理方法相比, 所提方法将阵列自由度

从  $L^2$  提升至  $\frac{(L+1)^4}{16} + 1$ ，并具有更好的信号波达角估计性能及较低的计算复杂度，仿真结果证明了所提方法的有效性。

## 2 张量基础

张量代数，也称为多线性代数，是经典线性代数（矩阵代数）的自然拓展，刻画的是多变量之间线性关系的数学理论<sup>[17]</sup>。如果把矩阵视为一个具有 2 个指针索引  $(r, c)$  的二维（二阶）数组，其中  $r$  和  $c$  分别指向矩阵的行和列，那么张量就是一个具有 3 个或 3 个以上指针索引  $(i, j, k, \dots)$  的多维（高阶）数组。有 3 个索引的三维数组称为三阶张量。如果数组索引有  $N$  个，那么这个（超体积）数组称为  $N$  阶张量。对于一个高维数据，如果仍以矩阵化的形式对其进行表示、分析和处理，就会丢失甚至破坏高维数据中可能存在的结构信息。与之形成鲜明对比的是，张量的高维特性赋予了其在表示高维数据时的自然性和结构上的紧凑性，若配合张量域的高维运算及张量分解对高维数据进行分析 and 处理，则可有效发掘和利用高维数据中存在的结构信息，从而提高高维阵列信号处理性能<sup>[17-18]</sup>。因此本文将采用张量代数理论对互质面阵信号进行分析和处理，以期提高信号处理效果。

下面简述本文使用的张量代数运算算子<sup>[17-20]</sup>。

**定义 1** 张量的典范多元（CP, canonical polyadic）分解。一个秩为  $K$  的  $N$  阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  的 CP 分解定义为  $K$  个秩一张量之和

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^K d_k \mathbf{a}_k^{(1)} \circ \mathbf{a}_k^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{a}_k^{(N)} \quad (1)$$

其中， $\circ$  表示外积运算， $d_k$  为常系数， $\mathbf{a}_k^{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n}$ ， $1 \leq n \leq N$ 。

**定义 2** CP 张量的张量展开。针对一个秩为  $K$  的  $N$  阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  的 CP 分解  $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^K d_k \mathbf{a}_k^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{a}_k^{(N)}$ ，令索引集合  $\mathbb{R}_j = \{r_{j,1}, \dots, r_{j,L_j}\}$  为张量  $\mathcal{A}$  维度索引集合  $\mathbb{R} = \{1, \dots, N\}$  的第  $j$  个子集， $j=1, \dots, J$ ，且满足关系  $\mathbb{R}_1 \cup \dots \cup \mathbb{R}_J = \mathbb{R}$  和  $\mathbb{R}_i \cap \mathbb{R}_l = \emptyset$  ( $1 \leq i, l \leq J$  且  $i \neq l$ )，则张量  $\mathcal{A}$  可展开（降阶）成一个  $J$  阶 CP 张量

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}_1, \dots, \mathbb{R}_J} = \sum_{k=1}^K d_k \mathbf{b}_k^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{b}_k^{(J)} \in \mathbb{C}^{I_{\mathbb{R}_1} \times \dots \times I_{\mathbb{R}_J}} \quad (2)$$

其中， $I_{\mathbb{R}_j} = \prod_{l_j=1}^{L_j} r_{j,l_j}$ ，向量  $\mathbf{b}_k^{(j)}$  为

$$\mathbf{b}_k^{(j)} = \mathbf{a}^{(r_{j,L_j})} \otimes \mathbf{a}^{(r_{j,L_j-1})} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}^{(r_{j,1})} \quad (3)$$

其中， $\otimes$  表示 Kronecker 乘积运算。

## 3 阵列信号张量处理方法

### 3.1 阵列结构

二维互质面阵结构<sup>[16]</sup>如图 1 所示，其包含 2 个稀疏的 URA，且均由  $L \times L$  个阵元组成，其相邻阵元间距分别为  $M_1 d_0$  和  $M_2 d_0$ ，其中， $M_1$  和  $M_2$  为互质整数， $d_0 = \frac{\lambda}{2}$ ， $\lambda$  为载波波长。2 个稀疏 URA 仅在坐标原点位置重合，物理阵元总数为  $2L^2 - 1$ 。整个阵列的阵元在坐标系的位置可表示为  $\Omega = \{(lM_1 d_0, lM_2 d_0) \cup (lM_2 d_0, lM_1 d_0) | 0 \leq l \leq L-1\}$ 。

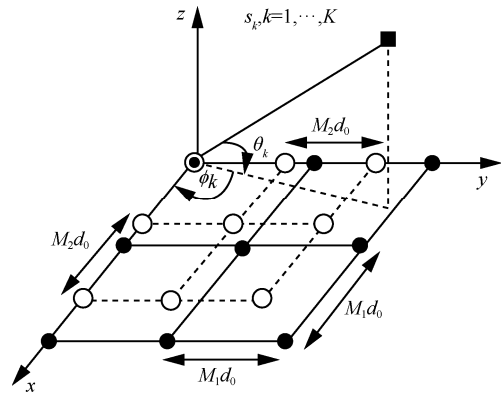


图 1 二维互质面阵结构 ( $L=3$ )

在图 1 所示的互质面阵结构下，文献[13-16]提出了不同的阵列信号处理方法，但这些方法均需令 2 个稀疏 URA 独立工作，即 2 个稀疏 URA 相互独立地对相同入射信号进行 DoA 估计。这是因为 2 个稀疏 URA 的阵元间距均大于载波半波长，因此其 DoA 估计值中都存在角度模糊，只有通过对比这 2 个稀疏 URA 对相同入射信号的 DoA 估计值（含模糊角度），再借助 2 个稀疏 URA 阵元间距互质的关系，才可消除角度模糊。这就意味着，这些处理方法可识别的入射信号数不到阵元总数的一半。因此，虽然二维互质阵列的大孔径带来了 DoA 估计性能的提升，但是其现有的信号处理方式却牺牲了一半的阵列自由度。

为了提高互质面阵的自由度并进一步提升其信号参数估计性能，接下来将借助张量代数对其接收信号进行全新的张量建模和处理。

### 3.2 阵列信号的张量模型

首先,如图 2 所示,将互质面阵中的一个稀疏 URA 划分成  $N_x \times N_y$  个大小均为  $L_x \times L_y$  的子面阵,且  $L = N_x + L_x - 1 = N_y + L_y - 1$ ,并以第 (1,1) 个子面阵作为参考子面阵。

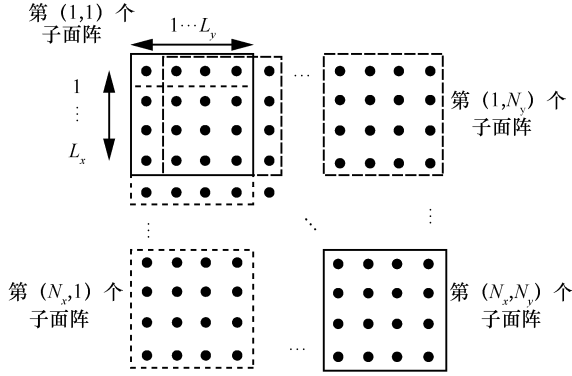


图 2 稀疏 URA 中的参考子面阵及  $x$  和  $y$  方向上的子面阵

假设有  $K$  个远场窄带不相关信号  $\{s_k(t), k=1, \dots, K\}$  分别以二维波达角  $\{(\theta_k, \phi_k)\}$  入射至阵列中,其中  $\theta_k \in (0, \frac{\pi}{2})$  和  $\phi_k \in (-\pi, \pi)$  分别为第  $k$  个入射信号的俯仰角和方位角。令方向余弦  $u_k = \cos \theta_k \cos \phi_k$ ,  $v_k = \cos \theta_k \sin \phi_k$ , 且  $\Theta_k = e^{j\pi M_x u_k}$ ,  $\Phi_k = e^{j\pi M_y v_k}$ 。则该稀疏 URA 中的第  $(n_x, n_y)$  个子面阵的阵列流型矩阵  $A_k^{(n_x, n_y)}$  可表示为

$$A_k^{(n_x, n_y)} = \Theta_{1k}^{n_x-1} \Phi_{1k}^{n_y-1} a_{1xk} \circ a_{1yk} \quad (4)$$

其中,  $a_{1xk} = [1, \dots, \Theta_{1k}^{L_x-1}]^T$  和  $a_{1yk} = [1, \dots, \Phi_{1k}^{L_y-1}]^T$  分别为参考子面阵在  $x$  和  $y$  方向上的导向矢量。

由式(4)可得,第  $(n_x, n_y)$  个子面阵在  $t$  时刻的接收信号矩阵  $X^{(n_x, n_y)}$  为

$$X^{(n_x, n_y)}(t) = \sum_{k=1}^K A_k^{(n_x, n_y)} x_k(t) + E^{(n_x, n_y)}(t), \quad t=1, \dots, P \quad (5)$$

其中,  $E^{(n_x, n_y)}(t)$  为第  $(n_x, n_y)$  个子面阵上对应的功率为  $\sigma_n^2$  的加性高斯白噪声矩阵;  $P$  为阵列接收信号的采样点总数,即快拍数。

综上所述,在  $t$  时刻,该稀疏 URA 的接收信号数据可表示为一个四阶张量  $\mathcal{X}_1(t) \in \mathbb{C}^{L_x \times N_x \times L_y \times N_y}$ , 即

$$\mathcal{X}_1(t) = \sum_{k=1}^K (a_{1xk} \circ b_{1xk} \circ a_{1yk} \circ b_{1yk}) x(t) + \mathcal{E}_1(t) \quad (6)$$

其中,  $b_{1xk} = [1, \dots, \Theta_{1k}^{N_x-1}]^T$  和  $b_{1yk} = [1, \dots, \Phi_{1k}^{N_y-1}]^T$  分别

为各子面阵相对参考子面阵在  $x$  和  $y$  方向上的不同相位差组成的向量,  $\mathcal{E}_1(t)$  为相对应的加性高斯白噪声张量。可见,四阶张量  $\mathcal{X}_1(t)$  中的第  $(l_x, n_x, l_y, n_y)$  个元素表示稀疏 URA 中第  $(n_x, n_y)$  个子面阵中的第  $(l_x, l_y)$  个阵元在  $t$  时刻的接收信号,因此具有清晰的结构信息。

同理,令  $\Theta_{2k} = e^{j\pi M_x u_k}$ ,  $\Phi_{2k} = e^{j\pi M_y v_k}$ , 则在  $t$  时刻,另一个稀疏 URA 的接收信号数据也可以表示为一个四阶张量  $\mathcal{X}_2(t) \in \mathbb{C}^{L_x \times N_x \times L_y \times N_y}$ , 即

$$\mathcal{X}_2(t) = \sum_{k=1}^K (a_{2xk} \circ b_{2xk} \circ a_{2yk} \circ b_{2yk}) x(t) + \mathcal{E}_2(t) \quad (7)$$

其中,  $a_{2xk} = [1, \dots, \Theta_{2k}^{L_x-1}]^T$ ,  $a_{2yk} = [1, \dots, \Phi_{2k}^{L_y-1}]^T$ ,  $b_{2xk} = [1, \dots, \Theta_{2k}^{N_x-1}]^T$ ,  $b_{2yk} = [1, \dots, \Phi_{2k}^{N_y-1}]^T$ 。

至此,本文已经将互质面阵中的 2 个稀疏 URA 的接收信号数据处理成了 2 个具有明确物理含义的四阶张量。接下来,对其进行求互相关等操作,即利用其高维二阶统计量来提高阵列自由度。

### 3.3 虚拟阵列的生成

受文献[5-6]的启发,本节将利用张量代数运算对互质面阵信号的“高维二阶统计量”进行处理,以期获得一个具有高自由度及大孔径的虚拟阵列的接收信号张量。对张量  $\mathcal{X}_1$  和  $\mathcal{X}_2$  求互相关张量得  $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{L_x \times N_x \times L_y \times N_y \times L_x \times N_x \times L_y \times N_y}$ , 即

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= E\{\mathcal{X}_1(t) \circ \mathcal{X}_2^*(t)\} = \\ &= \sum_{k=1}^K (a_{1xk} \circ b_{1xk} \circ a_{1yk} \circ b_{1yk} \circ a_{2xk}^* \circ b_{2xk}^* \circ a_{2yk}^* \circ b_{2yk}^*) \sigma_k^2 \end{aligned} \quad (8)$$

令  $J_D$  为  $D \times D$  的互换矩阵,其反对角线上元素均为 1,其他元素均为 0。又因为 ULA 存在共轭倒序不变性<sup>[20-23]</sup>, 即

$$\begin{aligned} a_{1xk}^* &= J_{L_x} (a_{1xk} \Theta_{1k}^{-L_x+1}), & b_{1xk}^* &= J_{N_x} (b_{1xk} \Theta_{1k}^{-N_x+1}) \\ a_{1yk}^* &= J_{L_y} (a_{1yk} \Phi_{1k}^{-L_y+1}), & b_{1yk}^* &= J_{N_y} (b_{1yk} \Phi_{1k}^{-N_y+1}) \\ a_{2xk} &= J_{L_x} (a_{2xk}^* \Theta_{2k}^{-L_x-1}), & b_{2xk} &= J_{N_x} (b_{2xk}^* \Theta_{2k}^{N_x-1}) \\ a_{2yk} &= J_{L_y} (a_{2yk}^* \Phi_{2k}^{-L_y-1}), & b_{2yk} &= J_{N_y} (b_{2yk}^* \Phi_{2k}^{N_y-1}) \end{aligned}$$

因此,对张量  $\mathcal{R}$  的共轭  $\mathcal{R}^*$  的每一维度的元素指针顺序进行取反操作,可以获得一个新张量  $\bar{\mathcal{R}}^*$ , 即

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}^* &= \sum_{k=1}^K (a_{1xk} \circ b_{1xk} \circ a_{1yk} \circ b_{1yk} \circ a_{2xk}^* \circ b_{2xk}^* \circ a_{2yk}^* \circ \\ & b_{2yk}^* \Theta_{1k}^{-L_x+1} \Phi_{1k}^{-L_y+1} \Theta_{2k}^{L_x-1} \Phi_{2k}^{L_y-1}) \sigma_k^2 \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\Theta_{1k}^{-L+1} \Phi_{1k}^{-L+1} \Theta_{2k}^{L-1} \Phi_{2k}^{L-1} = e^{j\pi(M_2 - M_1)(L-1)(u_k + v_k)}$ 。

将八阶张量  $\mathcal{R}$  和  $\bar{\mathcal{R}}^*$  看作 2 个大小均为  $L_x \times N_x \times L_y \times N_y \times L_x \times N_x \times L_y \times N_y \times 1$  的九阶张量, 并将  $\mathcal{R}$  和  $\bar{\mathcal{R}}^*$  沿着其第九维进行合并, 则可得到一个新张量  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{L_x \times N_x \times L_y \times N_y \times L_x \times N_x \times L_y \times N_y \times 2}$ , 即

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^K (a_{1xk} \circ b_{1xk} \circ a_{1yk} \circ b_{1yk} \circ a_{2xk}^* \circ b_{2xk}^* \circ a_{2yk}^* \circ b_{2yk}^* \circ q_k) \sigma_k^2 \quad (10)$$

其中,  $q_k = [1, \Theta_{1k}^{-L+1} \Phi_{1k}^{-L+1} \Theta_{2k}^{L-1} \Phi_{2k}^{L-1}]^T$ 。

由于  $q_k = [1, \Theta_{1k}^{-L+1} \Phi_{1k}^{-L+1} \Theta_{2k}^{L-1} \Phi_{2k}^{L-1}]^T$  中的  $\Theta_{1k} = e^{j\pi M_1 u_k}$ ,  $\Phi_{1k} = e^{j\pi M_1 v_k}$ ,  $\Theta_{2k} = e^{j\pi M_2 u_k}$ ,  $\Phi_{2k} = e^{j\pi M_2 v_k}$ ,  $u_k = \cos \theta_k \cos \phi_k$ ,  $v_k = \cos \theta_k \sin \phi_k$ , 且  $k$  表示第  $k$  个入射信号, 因此  $q_k$  对应的因子矩阵  $\mathcal{Q} = [q_1, q_2, \dots, q_K]$  是范德蒙矩阵, 且为满秩矩阵。此时, 若将  $q_k = [1, \Theta_{1k}^{-L+1} \Phi_{1k}^{-L+1} \Theta_{2k}^{L-1} \Phi_{2k}^{L-1}]^T$  看作某阵列的导向矢量, 而将其他维度视为入射信号, 则可知  $\mathcal{R}$  在  $q_k$  的作用下转换成  $\mathcal{H}$  后, 其数据量增加了一倍。

下面利用定义 2 对  $\mathcal{H}$  做张量展开处理, 以将其转换成一个等效的具有高自由度的阵列接收信号张量。

注意到,  $a_{1xk} = [1, \dots, \Theta_{1k}^{L-1}]^T$  为第一个 URA 中的参考子面阵在  $x$  方向上的导向矢量, 且相邻阵元间距为  $M_1 d_0$ , 阵元数为  $L_x$ 。  $b_{2xk} = [1, \dots, \Theta_{2k}^{N_x-1}]^T$  为第二个 URA 中各子面阵在  $x$  方向上的不同相位差组成的向量, 也可看作某阵列在  $x$  方向上的导向矢量, 且相邻阵元间距为  $M_2 d_0$ , 阵元数为  $N_x$ 。因此, 若借助定义 2 将  $\mathcal{H}$  中的第一维和第六维进行合并, 将生成一个在  $x$  方向上的虚拟阵列(称为差分伴随阵<sup>[5]</sup>)的导向矢量  $a_{1xk} \otimes b_{2xk}^*$ , 且该阵列阵元在  $x$  方向的位置可表示为

$$x(l_x, n_x) = M_1 l_x - M_2 n_x \quad (11)$$

其中,  $0 \leq l_x \leq L_x - 1 < M_2$ ,  $0 \leq n_x \leq N_x - 1 < M_1$ 。

由于  $M_1$  和  $M_2$  为互质整数, 那么  $x(l_x, n_x)$  存在  $L_x N_x$  个不同的值在以下范围内

$$-M_2(N_x - 1) \leq x(l_x, n_x) \leq M_1(L_x - 1) \quad (12)$$

因此, 导向矢量  $a_{1xk} \otimes b_{2xk}^*$  所对应的差分伴随阵为  $x$  方向拥有  $L_x N_x$  个阵元的虚拟非均匀线性阵列, 且阵元位置不重复, 即该  $x$  方向上的虚拟非均匀线性阵列的自由度为  $L_x N_x$ , 证明如下。

**证明** 假设上述虚拟非均匀线性阵列的虚拟

阵元位置出现重复情况, 即存在当  $(l_x, n_x) \neq (l'_x, n'_x)$  时,  $x(l_x, n_x) = x(l'_x, n'_x)$  仍成立的情况。注意到, 若  $x(l_x, n_x) = x(l'_x, n'_x)$  成立, 则意味着  $M_1 l_x - M_2 n_x = M_1 l'_x - M_2 n'_x$  成立, 也就意味着  $\frac{M_1}{M_2} = \frac{n_x - n'_x}{l_x - l'_x}$  成立。又由于  $M_1$  和  $M_2$  为互质整数(即两者的最大公约数为 1), 因此若要保证  $\frac{M_1}{M_2} = \frac{n_x - n'_x}{l_x - l'_x}$  成立, 则需  $(n_x - n'_x) \geq M_1$  且  $(l_x - l'_x) \geq M_2$  成立。然而, 由  $0 \leq n_x \leq N_x - 1 < M_1$  可得  $|(n_x - n'_x)| \leq n_x - 0 < M_1 - 0 = M_1$ , 同理, 由  $0 \leq l_x \leq L_x - 1 < M_2$  可得  $|(l_x - l'_x)| < M_2$ , 这与假设情况下的“ $(n_x - n'_x) \geq M_1$  且  $(l_x - l'_x) \geq M_2$  成立”相矛盾。因此上述虚拟非均匀线性阵列的虚拟阵元位置不会出现重复情况, 即  $L_x N_x$  个  $x(l_x, n_x)$  值无重复。证毕。

因此, 只需保证  $L_x < M_2$  和  $N_x < M_1$ , 则上述差分伴随阵元位置无重复, 即  $x$  方向上的差分伴随阵自由度为  $L_x N_x$ 。

同理, 可将  $\mathcal{H}$  中第三维的  $a_{1yk}$  和第八维的  $b_{2yk}^*$  进行合并, 将生成一个  $y$  方向上的自由度为  $L_y N_y$  的虚拟阵列导向矢量。类似方法还可作用于第二维和第五维, 以生成一个  $x$  方向上的自由度为  $L_x N_x$  的虚拟阵列导向矢量; 以及第四维和第七维, 以生成一个  $y$  方向上的自由度为  $L_y N_y$  的虚拟阵列导向矢量。

为达到上述目的, 利用定义 2, 且设置  $\mathbb{R}_1 = \{6, 1\}$ ,  $\mathbb{R}_2 = \{8, 3\}$ ,  $\mathbb{R}_3 = \{9\}$ ,  $\mathbb{R}_4 = \{5, 2\}$ ,  $\mathbb{R}_5 = \{7, 4\}$ , 对  $\mathcal{H}$  进行张量展开可得  $\mathcal{H}' \in \mathbb{C}^{L_x N_x \times L_y N_y \times 2 \times L_x N_x \times L_y N_y}$ , 即

$$\mathcal{H}' = \sum_{k=1}^K [(a_{1xk} \otimes b_{2xk}^*) \circ (a_{1yk} \otimes b_{2yk}^*) \circ q_k \circ (b_{1xk} \otimes a_{2xk}^*) \circ (b_{1yk} \otimes a_{2yk}^*)] \sigma_k^2 \quad (13)$$

为了最大化虚拟阵列的自由度(3.4 节将对其进行分析), 对  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2 \mathbb{R}_3 \mathbb{R}_4 \mathbb{R}_5}$  做进一步的张量展开, 即利用定义 2, 且设置  $\mathbb{R}_1 = \{2, 1\}$ ,  $\mathbb{R}_2 = \{3\}$ ,  $\mathbb{R}_3 = \{4, 3\}$ , 对  $\mathcal{H}'$  进行张量展开得

$$\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2 \mathbb{R}_3} = \sum_{k=1}^K [(a_{1xk} \otimes b_{2xk}^* \otimes a_{1yk} \otimes b_{2yk}^*) \circ q_k \circ (b_{1xk} \otimes a_{2xk}^* \otimes b_{1yk} \otimes a_{2yk}^*)] \sigma_k^2 \in \mathbb{C}^{L_x N_x L_y N_y \times 2 \times L_x N_x L_y N_y} \quad (14)$$

接下来, 对式(14)中的各项进行分析, 以得到

$\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$  对应的物理含义。

如前文所述, 由于  $\mathbf{a}_{1,xk} \otimes \mathbf{b}_{2,xk}^*$  和  $\mathbf{a}_{1,yk} \otimes \mathbf{b}_{2,yk}^*$  可分别视为位于  $x$  和  $y$  方向上的 2 个线阵的导向矢量。因此,  $\mathbf{a}_{1,xk} \otimes \mathbf{b}_{2,xk}^* \otimes \mathbf{a}_{1,yk} \otimes \mathbf{b}_{2,yk}^*$  项可视为某个位于  $x$ - $y$  平面上的虚拟面阵的导向矢量, 如图 3 所示, 该虚拟面阵是一个稀疏非均匀面阵并具有  $L_x N_x L_y N_y$  个阵元。注意,  $\mathbf{a}_{1,xk} \otimes \mathbf{b}_{2,xk}^* \otimes \mathbf{a}_{1,yk} \otimes \mathbf{b}_{2,yk}^*$  项对应于三阶张量  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$  的第一维。若将其第三维, 即  $\mathbf{b}_{1,xk} \otimes \mathbf{a}_{2,xk}^* \otimes \mathbf{b}_{1,yk} \otimes \mathbf{a}_{2,yk}^*$  项看作等效的第  $k$  个入射信号向量, 则张量  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$  可视为该虚拟的非均匀稀疏面阵的接收信号张量。而该张量中的第二维, 即  $\mathbf{q}_k$  项被保留 (其作用如前所述), 以保证其三阶张量数据形式, 便于后续针对  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$  利用张量分解实现信号 DoA 估计。

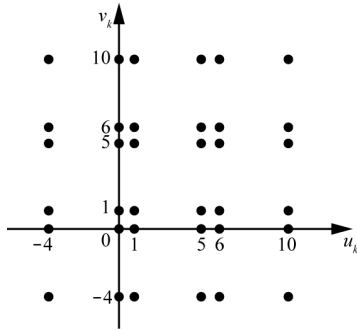


图 3 虚拟稀疏非均匀面阵结构 ( $L=4$ ,  $L_x=L_y=3$ ,  $N_x=N_y=2$ ,  $M_1=5$ ,  $M_2=4$ )

利用上述提出的方法对互质面阵信号进行处理后, 原阵列 (如图 1 所示) 接收信号张量  $\mathcal{X}_1$  和  $\mathcal{X}_2$  转换成为一个虚拟的稀疏非均匀面阵 (如图 3 所示) 接收信号张量  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$ 。接下来, 对该虚拟面阵的可辨识性 (即可处理的入射信号数或自由度) 进行分析, 并给出如何利用张量分解从  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$  中估计出入射信号二维 DoA 的方法。

### 3.4 虚拟阵列的可辨识能力分析

为了推导虚拟面阵的可辨识能力 (即可处理的入射信号数或自由度), 首先需借助张量 CP 分解的唯一性条件<sup>[17]</sup>。以式(14)中的三阶张量  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$  为例, 其中的 3 个因子矩阵定义为  $\mathbf{G} = [\mathbf{a}_{1,x1} \otimes \mathbf{b}_{2,x1}^* \otimes \mathbf{a}_{1,y1} \otimes \mathbf{b}_{2,y1}^*, \dots, \mathbf{a}_{1,xK} \otimes \mathbf{b}_{2,xK}^* \otimes \mathbf{a}_{1,yK} \otimes \mathbf{b}_{2,yK}^*]^T$ ,  $\mathbf{P} = [\mathbf{b}_{1,x1} \otimes \mathbf{a}_{2,x1}^* \otimes \mathbf{b}_{1,y1} \otimes \mathbf{a}_{2,y1}^*, \dots, \mathbf{b}_{1,xK} \otimes \mathbf{a}_{2,xK}^* \otimes \mathbf{b}_{1,yK} \otimes \mathbf{a}_{2,yK}^*]^T$ ,  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_K]^T$ , 当它们的 Kruskal 秩  $k(\mathbf{G})$ 、

$k(\mathbf{Q})$ 、 $k(\mathbf{P})$  满足如下关系时<sup>[17]</sup>

$$k(\mathbf{G}) + k(\mathbf{Q}) + k(\mathbf{P}) \geq 2K + 2 \quad (15)$$

则针对  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$  的 CP 分解可唯一估计出各因子矩阵。

假设入射信号的二维 DoA 值满足文献[24]的定理 4, 则在  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$  中有  $k(\mathbf{G}) = \min(L_x N_x L_y N_y, K)$ ,  $k(\mathbf{Q}) = \min(2, K)$ ,  $k(\mathbf{P}) = \min(L_x N_x L_y N_y, K)$  成立。将其代入式(15)得

$$\begin{aligned} & \min(L_x N_x L_y N_y, K) + \min(2, K) + \\ & \min(L_x N_x L_y N_y, K) \geq 2K + 2 \end{aligned}$$

$K$  值对应虚拟面阵的可辨识能力, 而不同的  $L_x$ 、 $L_y$ 、 $N_x$ 、 $N_y$  的取值都会影响  $K$  值的大小。因此, 为了最大化  $K$  值, 即最大化虚拟面阵的可辨识能力, 可将其转换成式(16)所示的求最优解问题

$$\begin{aligned} & \max_{L_x, N_x, L_y, N_y} L_x N_x L_y N_y \\ & \text{s.t. } L = L_x + N_x - 1 = L_y + N_y - 1 \end{aligned} \quad (16)$$

根据 Lagrange 乘法可得其解为  $L_x = N_x = L_y = N_y = \frac{L+1}{2}$ , 相应得到虚拟面阵的可辨识性为

$$K \leq \frac{(L+1)^4}{16} \quad (17)$$

且当  $L_x = N_x = L_y = N_y = \frac{L+1}{2}$  时, 虚拟面阵的阵元数也为  $\frac{(L+1)^4}{16}$ 。

因此, 针对一个具有  $2L^2 - 1$  个物理阵元的互质面阵, 利用上述处理方法, 将其中参数设置为  $L_x = N_x = L_y = N_y = \frac{L+1}{2}$  后, 可获得一个具有  $\frac{(L+1)^4}{16}$  个阵元的虚拟稀疏非均匀面阵, 且其对应的阵列自由度为  $\frac{(L+1)^4}{16} + 1$ , 而文献[13-16]中的方法所对应的阵列自由度最高仅为  $L^2$ , 所提方法在阵列自由度方面有显著的性能提升。

为描述方便, 上述分析均假设  $L$  为奇数。当  $L$  为偶数时, 可取  $L_x = L_y = \frac{L+2}{2}$ ,  $N_x = N_y = \frac{L}{2}$ , 此

时对应得到的虚拟面阵的阵元数为  $\frac{L^2(L+2)^2}{16}$ ，阵列的可辨识性为  $K \leq \frac{L^2(L+2)^2}{16}$ ，阵列自由度为  $\frac{L^2(L+2)^2}{16} + 1$ 。

### 3.5 基于张量分解的信号 DoA 估计

为了从  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$  中估计入射信号的二维 DoA，在  $K \leq \frac{(L+1)^4}{16}$  的前提下，可先借助文献[25]提供的 MATLAB 函数 cp3\_alssls 对张量  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3}$  进行 CP 分解，以获得其 3 个因子矩阵  $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{P}$  的估计值，记作  $\hat{\mathbf{G}}$ 、 $\hat{\mathbf{Q}}$ 、 $\hat{\mathbf{P}}$ 。而入射信号的 DoA 估计值可从  $\hat{\mathbf{G}}$  中获得，下面给出从因子矩阵  $\hat{\mathbf{G}}$  获取入射信号 DoA 的方法。

由于  $\mathbf{G} = [\mathbf{a}_{1x1} \otimes \mathbf{b}_{2x1}^* \otimes \mathbf{a}_{1y1} \otimes \mathbf{b}_{2y1}^*, \dots, \mathbf{a}_{1xK} \otimes \mathbf{b}_{2xK}^* \otimes \mathbf{a}_{1yK} \otimes \mathbf{b}_{2yK}^*]^T$ ， $\mathbf{a}_{1xk} = [1, \dots, \mathcal{O}_{1k}^{L_x-1}]^T$ ，且  $\mathcal{O}_{1k} = e^{j\pi M_1 u_k}$  为第  $k$  个入射信号入射至第一个稀疏 URA 时，其在  $x$  方向上相邻阵元之间的相位差。因此，如果能获得这个相位差值，便可获取入射信号在  $x$  方向上存在有角度模糊的方向余弦。

由  $\mathbf{G}$  的表达式容易得到

$$\hat{\mathbf{G}}(N_x L_y N_y + 1 : L_x N_x L_y N_y, :) = \hat{\mathbf{G}}(1 : N_x L_y N_y (L_x - 1), :) \Psi_{1x} \quad (18)$$

其中， $\hat{\mathbf{G}}(N_x L_y N_y + 1 : L_x N_x L_y N_y, :)$  代表矩阵  $\hat{\mathbf{G}}$  的后  $(L_x - 1)N_x L_y N_y$  行， $\hat{\mathbf{G}}(1 : N_x L_y N_y (L_x - 1), :)$  代表矩阵  $\hat{\mathbf{G}}$  的前  $(L_x - 1)N_x L_y N_y$  行， $\Psi_{1x} = \text{diag}\{\mathcal{O}_{11}, \mathcal{O}_{12}, \dots, \mathcal{O}_{1K}\}$ 。又因为  $\hat{\mathbf{G}}$  是一个满列秩矩阵，故有

$$\Psi_{1x} = \hat{\mathbf{G}}(1 : N_x L_y N_y (L_x - 1), :)^{\dagger} \hat{\mathbf{G}}(N_x L_y N_y + 1 : L_x N_x L_y N_y, :) \quad (19)$$

其中， $()^{\dagger}$  表示伪逆。此时  $K$  个入射信号入射至第一个稀疏 URA 时，其在  $x$  方向上相邻阵元之间的相位差便已获得。

将  $\hat{\mathbf{G}}$  按行进行重排操作，获得一个新矩阵  $\hat{\mathbf{G}}_{1y} = [\mathbf{a}_{1y1} \otimes \mathbf{b}_{2x1}^* \otimes \mathbf{a}_{1x1} \otimes \mathbf{b}_{2y1}^*, \dots, \mathbf{a}_{1yK} \otimes \mathbf{b}_{2xK}^* \otimes \mathbf{a}_{1xK} \otimes \mathbf{b}_{2yK}^*]^T$ ，从中可得

$$\Psi_{1y} = \hat{\mathbf{G}}_{1y}(1 : N_x L_x N_y (L_y - 1), :)^{\dagger} \hat{\mathbf{G}}_{1y}(N_x L_x N_y + 1 : L_x N_x L_y N_y, :) \quad (20)$$

其中， $\Psi_{1y} = \text{diag}\{\mathcal{O}_{11}, \mathcal{O}_{12}, \dots, \mathcal{O}_{1K}\}$ ， $\mathcal{O}_{1k} = e^{j\pi M_1 v_k}$  为第  $k$  个入射信号入射至第一个稀疏 URA 时，其在  $y$  方向上相邻阵元之间的相位差。

同理，可以获得  $\Psi_{2x} = \text{diag}\{\mathcal{O}_{21}, \mathcal{O}_{22}, \dots, \mathcal{O}_{2K}\}$ ，以及  $\Psi_{2y} = \text{diag}\{\mathcal{O}_{21}, \mathcal{O}_{22}, \dots, \mathcal{O}_{2K}\}$ ，即得到  $K$  个入射信号入射至第二个稀疏 URA 时，其在  $x$  和  $y$  方向上相邻阵元的相位差。

文献[13]指出，当阵元间距大于载波半波长时，阵列孔径较大，接收信号估计性能较好，但会出现角度模糊问题。而二维互质阵列中的 2 个稀疏 URA 的相邻阵元间距均大于载波半波长，因此从  $\Psi_{1x}$  和  $\Psi_{1y}$  中估计的入射信号 DoA 值均存在角度模糊，从  $\Psi_{2x}$  和  $\Psi_{2y}$  估计的入射信号 DoA 值也都存在角度模糊。

但文献[13]同时还指出，在使用二维互质阵列进行 DoA 估计时，其包含的 2 个 URA 阵元间距之间的互质特性可用来消除角度模糊。因此，也可以利用该特性消除  $\Psi_{1x}$ 、 $\Psi_{1y}$ 、 $\Psi_{2x}$ 、 $\Psi_{2y}$  中存在的角度模糊，具体方法如下。

首先，分别取出  $\Psi_{1x}$ 、 $\Psi_{1y}$ 、 $\Psi_{2x}$ 、 $\Psi_{2y}$  对角元素的相位  $\alpha_{1k}$ 、 $\beta_{1k}$ 、 $\alpha_{2k}$ 、 $\beta_{2k}$ ，且表示为

$$\begin{cases} \alpha_{1k} = M_1 \pi u_k + 2k_{1x} \pi, & -\frac{M_1 + 1}{2} < k_{1x} < \frac{M_1 + 1}{2} \\ \beta_{1k} = M_1 \pi v_k + 2k_{1y} \pi, & -\frac{M_1 + 1}{2} < k_{1y} \leq 0 \\ \alpha_{2k} = M_2 \pi u_k + 2k_{2x} \pi, & -\frac{M_2 + 1}{2} < k_{2x} < \frac{M_2 + 1}{2} \\ \beta_{2k} = M_2 \pi v_k + 2k_{2y} \pi, & -\frac{M_2 + 1}{2} < k_{2y} \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

其中， $k = 1, \dots, K$ ， $\alpha_{1k}$ 、 $\beta_{1k}$ 、 $\alpha_{2k}$ 、 $\beta_{2k}$  均为含有角度模糊的相位观测值，且均在  $[-\pi, \pi]$  范围内。

特别地，当  $M_1 = M_2 = 1$  时，即相邻阵元间距为载波半波长时， $k_{1x} = k_{1y} = k_{2x} = k_{2y} = 0$ ，即不包含角度模糊，此时入射信号的俯仰角和方位角可通过式(22)求得。

$$\begin{cases} \theta_k = \arctan\left(\frac{\beta_{1k} + \beta_{2k}}{\alpha_{1k} + \alpha_{2k}}\right) \\ \phi_k = \arccos\frac{1}{\pi} \left( \sqrt{\left(\frac{\alpha_{1k} + \alpha_{2k}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_{1k} + \beta_{2k}}{2}\right)^2} \right) \end{cases} \quad (22)$$

当  $M_1 = M_2 > 1$  时, 方位角和俯仰角估计值可能出现“模糊”现象<sup>[13]</sup>, 即  $k_{1x}$ 、 $k_{1y}$ 、 $k_{2x}$ 、 $k_{2y}$  的值不为零, 但此时文献[13-16]中的解模糊方法也适用于式(21), 即

$$\begin{aligned} \theta_k &= \arctan\left(\frac{\gamma_{1k} + \gamma_{2k}}{\eta_{1k} + \eta_{2k}}\right) \\ \phi_k &= \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\eta_{1k} + \eta_{2k})^2 + (\gamma_{1k} + \gamma_{2k})^2}\right) \\ \text{s.t. } &\min(\eta_{1k} - \eta_{2k}), \min(\gamma_{1k} - \gamma_{2k}) \end{aligned} \quad (23)$$

其中,  $\gamma_{1k} = \frac{\beta_{1k} - 2k_{1y}\pi}{M_1\pi}$ ,  $\gamma_{2k} = \frac{\beta_{2k} - 2k_{2y}\pi}{M_2\pi}$ ,  
 $\eta_{1k} = \frac{\alpha_{1k} - 2k_{1x}\pi}{M_1\pi}$ ,  $\eta_{2k} = \frac{\alpha_{2k} - 2k_{2x}\pi}{M_2\pi}$ 。

综上所述, 假设被处理的二维互质面阵如图 1 所示, 共有  $2L^2 - 1$  个物理阵元, 且  $L$  为奇数, 其中的 2 个稀疏 URA 的大小均为  $L \times L$ , 且相邻阵元间距分别为  $M_1d_0$  和  $M_2d_0$ , 具有高自由度的互质面阵信号张量处理方法的执行步骤如下。

1) 将 2 个 URA 均拆分成  $\frac{L+1}{2} \times \frac{L+1}{2}$  个大小均为  $\frac{L+1}{2} \times \frac{L+1}{2}$  的重叠子面阵, 然后将这些子面阵的接收信号数据合并成四阶张量  $\mathcal{X}_1(t)$  和  $\mathcal{X}_2(t)$ 。

2) 求出  $\mathcal{X}_1(t)$  和  $\mathcal{X}_2(t)$  的互相关张量  $\mathcal{R}$  及其对应的  $\bar{\mathcal{R}}^*$ , 并将它们合并成一个九阶张量  $\mathcal{H}$ 。

3) 利用定义 2 对  $\mathcal{H}$  进行张量展开, 得到具有高自由度的虚拟阵列的接收信号张量  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1\mathbb{R}_2\mathbb{R}_3}$ , 如式(14)所示。

4) 对  $\mathcal{H}'_{\mathbb{R}_1\mathbb{R}_2\mathbb{R}_3}$  进行 CP 分解, 得到其因子矩阵  $\mathbf{G}$  的估计值  $\hat{\mathbf{G}}$ 。

5) 利用式(19)和式(20)及其类似的方法从  $\hat{\mathbf{G}}$  中求出  $\Psi_{1x}$ 、 $\Psi_{1y}$ 、 $\Psi_{2x}$ 、 $\Psi_{2y}$ , 再利用式(19)求出包含角度模糊的相位观测值  $\alpha_{1k}$ 、 $\beta_{1k}$ 、 $\alpha_{2k}$ 、 $\beta_{2k}$ 。

6) 利用式(23)消除  $\alpha_{1k}$ 、 $\beta_{1k}$ 、 $\alpha_{2k}$ 、 $\beta_{2k}$  中的角度模糊, 并最终得到信号的二维 DoA 估计值。

### 4 仿真结果分析

将所提方法与文献[13-16]中的方法进行仿真对比研究, 且将互质阵列的克拉美劳界 (CRB, Cramér-Rao bound)<sup>[14]</sup>作为参考。需要注意的是, 文献[13]和文献[16]的区别在于阵列结构, 而它们所

使用的阵列信号处理方法是相同的, 且本文采用的是文献[16]的阵列结构。

入射信号 DoA 均方误差 (RMSE, root mean square error) 表示为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{NK} \sum_{t=1}^{\bar{N}} \sum_{k=1}^K [(\theta_k - \tilde{\theta}_k^{(t)})^2 + (\phi_k - \tilde{\phi}_k^{(t)})^2]} \quad (24)$$

其中,  $\bar{N}$  为蒙特卡洛数,  $t = 1, \dots, \bar{N}$ ,  $\theta_k$  和  $\phi_k$  分别为信号俯仰角和方位角的真实值,  $\tilde{\theta}_k$  和  $\tilde{\phi}_k$  分别为信号俯仰角和方位角估计值。

#### 4.1 所提方法阵列自由度验证

互质面阵结构设置为  $L = 4$ ,  $M_1 = 5$ ,  $M_2 = 4$ , 总阵元数为 31。所提方法中, 按上述理论分析取  $L_x = L_y = \frac{L+2}{2} = 3$ ,  $N_x = N_y = \frac{L}{2} = 2$ , 则对应的虚拟面阵的自由度为 37, 可辨识性为 36。设快拍数为 500, 蒙特卡洛数为 100, 与文献[26]一样选择无噪环境, 假设有 36 个远场窄带不相关信号入射至阵列, 且信号 DoA 方向余弦  $\{(u, v)\}$  值为  $\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{11(m_1 - 1)\pi}{90}\right), \sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{(m_2 - 1)\pi}{18}\right)\right\}$ ,  $m_1 = 1, \dots, 6, m_2 = 1, \dots, 6$ , 其中,  $u = \cos\theta \cos\phi$ ,  $v = \cos\theta \sin\phi$ 。所提方法的 DoA 估计结果如图 4 所示。

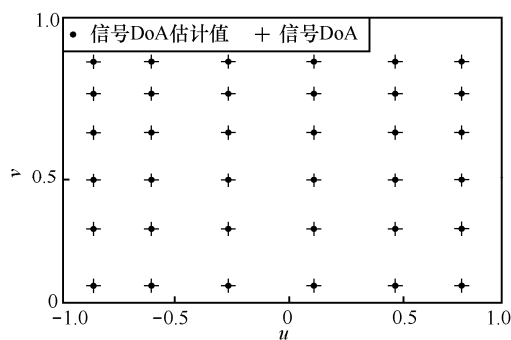


图 4 所提方法的 DoA 估计结果

从图 4 中可以看出, 与理论分析一致, 本文所提的具有 37 个自由度的方法可以成功辨识出这 36 个信号 (物理阵元仅为 31)。

在该仿真条件下, 互质面阵共包含 2 个大小均为  $4 \times 4$  的稀疏 URA。由于文献[13-16]中方法均需令 2 个稀疏 URA 独立工作。因此, 在该阵列结构参数情况下, 文献[13-16]中方法无法完成这 36 个入射信号的 DoA 估计。具体原因分析如下。

文献[13-14, 16]中均采用 MUSIC 类方法, 在该仿真条件下, 其每个 URA 大小均为  $4 \times 4$ , 共 16 个阵元。按照空间谱估计理论可知, 每个 URA 接收信号协方差矩阵大小为  $16 \times 16$ 。对其进行特征值分解可得到 16 个特征值, 因此其最多只能处理 15 个入射信号。相似地, 文献[15]采用 FM 对互质面阵中的 2 个稀疏 URA 接收信号分别进行 DoA 估计, 因此需要对每个稀疏 URA (大小为  $4 \times 4$ ) 阵列流型矩阵进行分块处理。而该阵列流型矩阵大小为  $16 \times 36$  (对应 16 个阵元和 36 个入射信号), 但 FM 要求阵列流型矩阵的行向量数多于列向量数, 故此时算法失效, 即该算法只能处理 15 个入射信号。

可见, 在自由度提升方面, 所提方法显著优于文献[13-16]算法。

#### 4.2 信号 DoA 估计性能对比

对各方法的 DoA 估计 RMSE 性能随信噪比及快拍数变化情况进行仿真实验对比。假设有 2 个远场窄带不相关信号入射至阵列, 其 DoA 分别为  $(\theta_1, \phi_1) = (28^\circ, 31^\circ)$ ,  $(\theta_2, \phi_2) = (58^\circ, 64^\circ)$ , 固定快拍数为 200, 蒙特卡洛数为 500, 信噪比从  $-10$  dB 变化到  $20$  dB, 其他条件与 4.1 节相同。各方法的 RMSE 如图 5 所示。可以看出, 所提方法具有最佳的 RMSE 性能, 且随信噪比的变化较平稳。此外, 其他方法在较低信噪比下的 RMSE 性能并不理想, 其中文献[15]采用 FM, 性能最差, 这是因为低信噪比可能造成解模糊失败(即伪峰与伪峰的距离过近, 被误认为是 2 个真实的谱峰<sup>[13]</sup>), 而所提方法由于具有较高的阵列自由度因此表现较优。

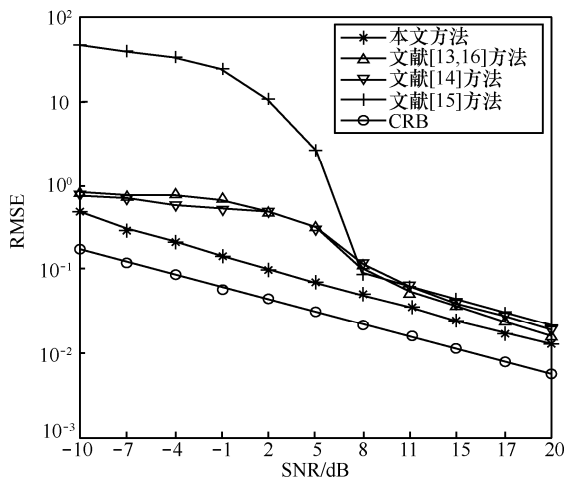


图 5 RMSE 随信噪比变化的结果

固定 SNR 为 5 dB, 对比各方法 RMSE 性能随快拍数变化的情况。快拍数从 100 变化到 800, 则各方法的 RMSE 性能如图 6 所示。由图 6 可知, 所提方法同样具有最优的 RMSE 性能。

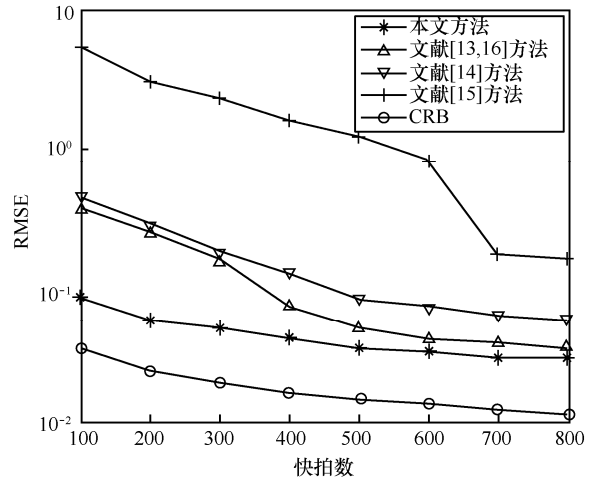


图 6 RMSE 随快拍数变化的结果

由实验结果可知, 和文献[13-16]的方法相比, 所提方法具有最优的信号 DoA 估计性能, 且在信噪比较低或快拍数较少的情况下, 其优势更加明显。

#### 4.3 计算复杂度对比

在阵列物理阵元总数变化的情况下, 利用各方法的平均执行时间对它们的计算复杂度进行仿真对比。仿真的硬件条件为 Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q9550 @2.83 GHz, 6 GB RAM。仿真软件为 MATLAB2016a。其他仿真条件设置如下。快拍数为 500, 信噪比为  $-5$  dB, 文献[13-14, 16]中网格搜索步长均设置为 0.000 2, 蒙特卡洛数为 100; 互质面阵结构设置为  $M_1 = 6$ ,  $M_2 = 5$ ,  $L$  从 3 变化到 7, 对应的阵列物理阵元总数分别为 17、31、49、71、97。假设有 2 个远场窄带不相关入射信号, 其 DoA 分别为  $(\theta_1, \phi_1) = (20^\circ, 30^\circ)$ ,  $(\theta_2, \phi_2) = (50^\circ, 60^\circ)$ 。各方法平均每次运行所需的时间随物理阵元数变化结果如图 7 所示, 各方法 RMSE 随物理阵元数变化的结果如图 8 所示。

由图 7 可知, 由于所提方法不需要二维谱峰搜索, 因此表现出仅次于文献[15]方法的良好系统实时性, 但需注意的是文献[15]方法在低信噪比或少快拍数的情况下信号估计性能较差(如前实验结果所示)。此外, 由图 8 可知, 在不同物理阵元数的情况下, 所提方法同样具有最好的 RMSE 性能。

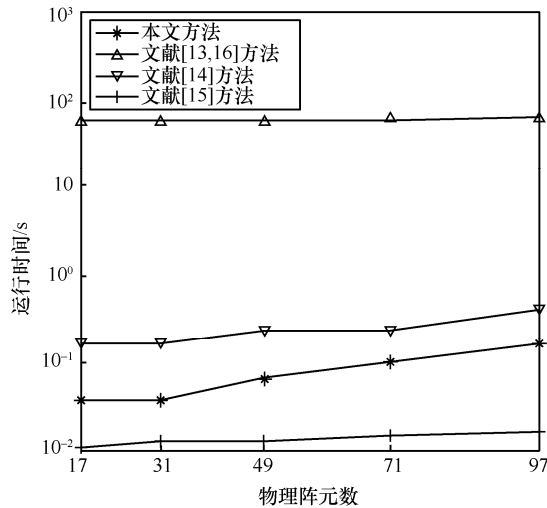


图 7 运行时间随阵元总数变化的结果

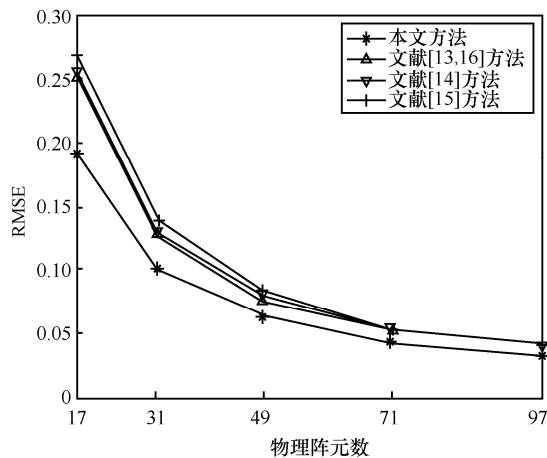


图 8 RMSE 随物理阵元总数变化的结果

### 5 结束语

本文提出了一种具有高自由度的互质面阵信号的张量处理方法。该方法可将一个由  $2L^2 - 1$  个物理阵元构成的互质面阵转换为一个由  $\frac{(L+1)^4}{16}$  个阵元构成的虚拟稀疏非均匀面阵，从而大幅提高了阵列自由度。此外，本文还给出了利用张量分解从该虚拟阵列接收信号张量中获取信号二维 DoA 的方法，从而避免了二维谱峰搜索，降低了计算复杂度。理论分析和仿真实验验证了所提方法的有效性。

### 参考文献:

[1] KRIM H, VIBERG M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67-94.

[2] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280.

[3] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(7): 984-995.

[4] MARCOS S, MARSAL A, BENIDER M. The propagator method for sources bearing estimation[J]. Signal Processing, 1995, 42(2): 121-138.

[5] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: a novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(8): 4167-4181.

[6] VAIDYANATHAN P P, PAL P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(2): 573-586.

[7] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Coprime sampling and the music algorithm[C]//Digital Signal Processing Workshop & IEEE Signal Processing Education Workshop. Piscataway: IEEE Press, 2011: 289-294.

[8] QIN S, ZHANG Y D, AMIN M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(6): 1377-1390.

[9] WEI Z, WEI L, JU W, et al. Computationally efficient 2-D DoA estimation for uniform rectangular arrays[J]. Multidimensional Systems & Signal Processing, 2014, 25(4): 847-857.

[10] CHEN Y, LEE J H, YEH C C. Two-dimensional angle-of-arrival estimation for uniform planar arrays with sensor position errors[J]. Radar & Signal Processing IEE Proceedings F, 1993, 140(1): 37-42.

[11] CHEN H, HOU C, ZHU W P, et al. ESPRIT-like two-dimensional direction finding for mixed circular and strictly noncircular sources based on joint diagonalization[J]. Signal Processing, 2017, 141: 48-56.

[12] ZHOU M, ZHANG X, QIU X, et al. Two-dimensional DoA estimation for uniform rectangular array using reduced-dimension propagator method[J]. International Journal of Antennas & Propagation, 2014, 2014(1): 1-10.

[13] WU Q, SUN F, LAN P, et al. Two-dimensional direction-of-arrival estimation for co-prime planar arrays: a partial spectral search approach[J]. IEEE Sensors Journal, 2016, 16(14): 5660-5670.

[14] WANG Z, XIAO F Z, ZHAN S. Two-dimensional direction of arrival estimation for coprime planar arrays via a computationally efficient one-dimensional partial spectral search approach[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2017, 11(10): 1581-1588.

[15] 张彦奎, 王大鸣, 耿卫, 等. 基于双向传播算子的互质面阵二维波达方向估计[J]. 电子学报, 2019, 47(3): 576-583.

ZHANG Y K, WANG D M, GENG W, et al. Two-dimension DoA estimation coprime rectangular array using bi-directional propagator method[J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(3): 576-583.

[16] ZHENG W, ZHANG X, ZHAI H. Generalized coprime planar array

- geometry for two-dimensional DoA estimation[J]. IEEE Communications Letters, 2017, 21(5): 1075-1078.
- [17] KOLDA T G, BADER B W. Tensor decompositions and applications[J]. SIAM Review, 2009, 51(3): 455-500.
- [18] CICHOCKI A, MANDIC D, LATHAUWER L D, et al. Tensor decompositions for signal processing applications: from two-way to multiway component analysis[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2015, 32(2): 145-163.
- [19] KOLDA T G. Multilinear operators for higher-order decompositions[R]. US Department of Energy, (2006-04-01)[2020-03-31].
- [20] RAO W, LI D, ZHANG J Q. A tensor-based approach to l-shaped arrays processing with enhanced degrees of freedom[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2018, 25(2): 1-5.
- [21] DONG Y Y, DONG C, XU J, et al. Computationally efficient 2-D DoA estimation for L-shaped array with automatic pairing[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2016, 15: 1669-1672.
- [22] HUANG K C, TEH C C. Adaptive beamforming with conjugate symmetric weights[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(7): 926-932.
- [23] HUANG K C, YEH C C. A unitary transformation method for angle-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(4): 975-977.
- [24] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Nested arrays in two dimensions, part II: application in two dimensional array processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(9): 4706-4817.
- [25] NION D, SIDIROPOULOS N D. Tensor algebra and multidimensional harmonic retrieval in signal processing for MIMO radar[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(11): 5693-5705.
- [26] SHI J, HU G, ZHANG X, et al. Sparsity-based two-dimensional DoA estimation for coprime array: from sum-difference coarray viewpoint[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(21): 5591-5604.

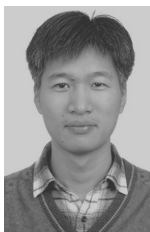
## [作者简介]



饶伟 (1982- )，男，江西乐安人，博士，南昌工程学院副教授、硕士生导师，主要研究方向为阵列信号处理、自适应信号处理。



桂宇风 (1995- )，男，江西新余人，南昌工程学院硕士生，主要研究方向为阵列信号处理等。



李旦 (1982- )，男，江苏常州人，博士，复旦大学副教授、硕士生导师，主要研究方向为信号处理及其在超声检测、图像、控制、测量和雷达中的应用等。